גאומטריה אלגברית - תרגיל 7

שאלה 1. תהי (X,A) קבוצה מחוייגת מעל שדה F, ותהי $x\in X$.
נגדיר $\varphi: A \longrightarrow F$ ע"י $\varphi(f) = f(x)$.
הוכיחו כי φ העתקה של F-אלגבראות.

שאלה 2. נגדיר $X = \{xy=0\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.
תארו את $F[X]$ ומצאו את האידיאלים של $F[X]$
המתאימים לתת הקבוצות הסגורות הבאות של X:

$Y_1 = \{x=0\} \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$Y_2 = \{(1,0)\}$, $Y_3 = Y_1 \cup Y_2$

שאלה 3. תהי X קבוצה אלגברית אפינית ותהי $Y\subseteq X$ תת-קבוצה סגורה זריצקי.

א) הוכיחו כי $\dim Y \leq \dim X$.

ב) נניח כי X אי-פריקה. הוכיחו כי $\dim Y = \dim X \Longleftrightarrow Y=X$.

ג) תנו דוגמא ל X פריקה ו- $Y \subsetneq X$ סגורה כך ש- $\dim Y = \dim X$.

שאלה 4. מצאו את המימד של הקבוצות האלגבריות הבאות ב- $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}}$
(פונקציות הקואורדינטה מסומנות ב- x,y,z,w).

א) $Y_1 = \{x^2+w^3=0,\ xyzw=0\}$

ב) $Y_2 = \{x(y+z)=0,\ xw=0\}$

שאלה 5. <u>משפט:</u> אם $X\subseteq\mathbb{A}^n, Y\subseteq\mathbb{A}^m$ קבוצות אלגבריות אי-פריקות אז גם $X\times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ היא אי-פריקה.
היעזרו במשפט ובמשפט <u>מימד הסיפ</u> כדי להוכיח שאם X,Y אי-פריקות
אז $\dim X\times Y = \dim X + \dim Y$.

<u>בונוס:</u> הוכיחו כי $\dim X\times Y = \dim X + \dim Y$ ללא הנחה ש- X,Y אי פריקות.

שאלה 6. תהי X קבוצה אלגברית. נזכיר כי, עבור $f\in F[X]$, הגדרנו

$$D(f)=\{x\in X : f(x)\neq 0\}$$

א. הוכיחו כי $D(f)\cap D(g)=D(fg)$ לכל $f,g\in F[X]$.

ב. תהי $S\subseteq F[X]$ קבוצה כך ש- $X=\bigcup_{f\in S} D(f)$.
הוכיחו כי קיימים $f_1,\dots,f_r\in S$ כך ש-

$$X=D(f_1)\cup\cdots\cup D(f_r)$$

(רמז: $Z(S)=X-\bigcup_{f\in S} D(f)$.)